حل تمرین‌های سری دوم فرآیندهای تصادفی

-۱

الف)

$$Y_1(t)=e^{jt}X(t) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m_1(t)=E\{Y_1(t)\}=e^{jt}E\{X(t)\}=0 \\ R_{YY}(t+t,t)=E\{Y_1(t+t)Y_1^*(t)\}=e^{jt}E\{X(t+t)X^*(t)\}=e^{jt}R_{XX}(t) \end{cases}$$

Y_1 فرآیند WSS است.

ب) چون رابطهٔ $Y_2(t)$ و $X(t)$ غیرخطی ولی تغییر ناپذیر با زمان است، اگر فرآیند $X(t)$ یک فرآیندSSS کامل بود، فرآیند $Y_2(t)$ هم یک فرآیند SSS کامل می‌شد. در مورد WSS بودن ولی این‌طور نیست چرا که ممان‌های مرتبهٔ اول و دوم فرآیند جدید به ممان‌های مرتبهٔ بالاتر فرآیند $X(t)$ بستگی پیدا می‌کند و این ممان‌ها ممکن است با گذشت زمان تغییر کنند.

ج)

$$m_{Y_3}(t)=E\{e^{jX(t)}\}E\{e^{jA}\}=E\{e^{jX(t)}\}(\underbrace{E\{\cos A\}}_{=0}+jE\{\underbrace{\sin A}_{=0}\})=0$$

$$R_{Y_3}(t)=E\{e^{j(X(t+t)+A)}e^{-j(X(t)+A)}\}=E\{e^{j(X(t+t)-X(t))}\}=\Phi_{X(t+t)-X(t)}(1)=e^{-\frac{1}{2}s^2}=e^{R_X(t)-R_X(0)}$$

$$s^2=\mathrm{var}\{X(t+t)-X(t)\}=E\{[X(t+t)-X(t)]^2\}=2[R_X(0)-R_X(t)]$$

بنابراین Y_3 فرآیند WSS است.

د)

$$m_{Y_4}(t)=E\{e^{jBX(t)}\}=\frac{1}{2}E\{e^{jX(t)}\}+\frac{1}{2}E\{e^{-jX(t)}\}=\frac{1}{2}\Phi_{X(t)}(1)+\frac{1}{2}\Phi_{X(t)}(-1)=e^{-\frac{1}{2}R_X(0)}$$

$$R_{Y_4}(t)=E\{e^{jBX(t+t)}e^{-jBX(t)}\}=E\{e^{jB(X(t+t)-X(t))}\}=\frac{1}{2}E\{e^{j(X(t+t)-X(t))}\}+\frac{1}{2}E\{e^{-j(X(t+t)-X(t))}\}$$

$$=\frac{1}{2}\Phi_{X(t+t)-X(t)}(1)+\frac{1}{2}\Phi_{X(t+t)-X(t)}(-1)=e^{-\frac{1}{2}s^2}=e^{R_X(t)-R_X(0)}$$

بنابراین Y_4 فرآیند WSS است.

در موارد (ج) و (د)، چون $X(t)$ نرمال بود، بدون محاسبه نیز مشخص بود فرآیندها WSS هستند. چون $X(t)$ یک فرآیند SSS نیز هست.

-۲

الف)

$$\tau = t-s$$

$$C_X(\tau) = R_X(\tau)-m_X^2 = 0 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{2}\cos(2\pi\tau)\right)^2-1=0$$

$$\Rightarrow \cos(2\pi\tau)=0 \Rightarrow \tau = t-s = \frac{2k+1}{4}, k\in\mathbb{Z}$$

ب)

$$E\left\{\left(X(t)-X(s)\right)^2\right\}=0 \Rightarrow 2R_X(0)-2R_X(t-s)=0$$

$$\Rightarrow R_X(t-s)=R_X(0) \xRightarrow{\tau=t-s} R_X(\tau)=R_X(0)=\frac{9}{4} \Rightarrow \cos(2\pi\tau)=1 \Rightarrow \tau=t-s=k, k\in\mathbb{Z}$$

ج) از قسمت (ب) داریم:

$$X(1)=X(0)\ ms \Rightarrow X(1)=X(0)\ wp1 \Rightarrow \Pr\{X(0)=X(1)\}=1$$

۳- الف)

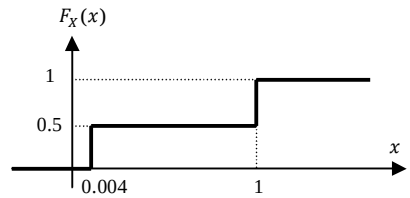
$$E\{X(t)\} = \Pr\{\xi = \xi_1\}\, E\{X(t)|\xi = \xi_1\} + \Pr\{\xi = \xi_2\}\, E\{X(t)|\xi = \xi_2\}$$
$$\Rightarrow E\{X(t)\} = \frac{1}{2}E\{\sin^2 t\} + \frac{1}{2}E\{\cos^2 t\} = 1$$
$$C_X(t,s) = R_X(t,s) - m_X(t)m_X(s) = R_X(t,s) - \frac{1}{4}$$
$$R_X(t,s) = \frac{1}{2}E\{\sin^2 t \sin^2 s\} + \frac{1}{2}E\{\cos^2 t \cos^2 s\} = \frac{1}{2}(\sin^2 t \sin^2 s + \cos^2 t \cos^2 s)$$
$$\Rightarrow C_X(t,s) = \frac{1}{2}\left(\sin^2 t \sin^2 s + \cos^2 t \cos^2 s - \frac{1}{2}\right)$$

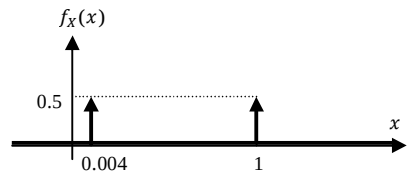
ب) برای اینکه مقدار این فرایند یک عدد یقینی باشد کافی است این فرایند از متغیر تصادفی ξ مستقل باشد و برای تحقق این امر داریم

$$\cos^2 t = \sin^2 t \Rightarrow \tan t = \pm 1 \Rightarrow t = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

ج)

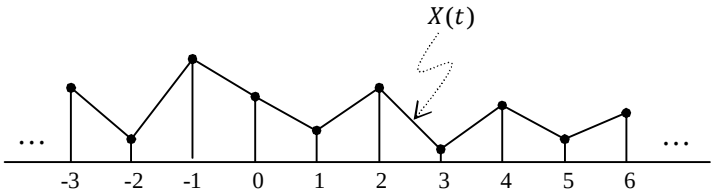
$$X = X\left(\frac{1}{16}, \xi\right) = \begin{cases} \sin^2 \frac{1}{16} \cong 0.004, \xi = \xi_1 \\ \cos^2 \frac{1}{16} \cong 1, \quad \xi = \xi_2 \end{cases}$$
$$F_X(x) = P\{X \le x\} = \frac{1}{2}P\{X \le x|\xi = \xi_1\} + \frac{1}{2}P\{X \le x|\xi = \xi_2\}$$
$$= \frac{1}{2}P\{0.004 \le x\} + \frac{1}{2}P\{1 \le x\} = \begin{cases} 1, & x \ge 1 \\ \frac{1}{2}, & 0.004 \le x < 1 \\ 0, & x < 0.004 \end{cases}$$





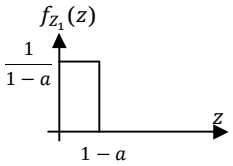
$$\Phi_X(s) = E\{e^{sX}\} = \frac{1}{2}e^{0.004s} + \frac{1}{2}e^{s}$$

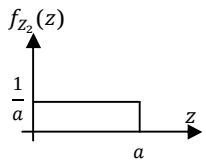
۴- الف)



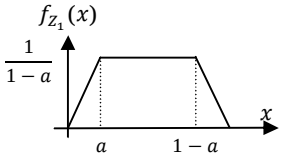
ب) فرض می کنیم $n \le t < n + 1 \Rightarrow n = \lfloor t \rfloor$

$$X(t) = U_n + (t-n)(U_{n+1} - U_n) \xRightarrow{a=t-n} (1-a)U_n + aU_{n+1} = Z_1 + Z_2$$
$$U_n \sqcup U_{n+1} \Rightarrow Z_1 \sqcup Z_2, \begin{cases} Z_1 \sim U(0, 1-a) \\ Z_2 \sim U(0, a) \end{cases}$$





$$f_{X(t)}(x) = f_X(x;t) = f_{Z_1}(x) * f_{Z_2}(x)$$



ج)

$$m_X(t) = (1-a)E\{U_n\} + aE\{U_{n+1}\} = \frac{1-a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$$
$$R_X(t,t) = E\{X^2(t)\} = \frac{a^2+(1-a)^2+3}{12}$$

مستقل از زمان نیست پس $X(t)$، WSS نیست.

د) چون $X(t)$ به ازای $t \notin \mathbb{Z}$ خطوطی است که نقاط U_nها را به یکدیگر متصل می نماید پس حتما $\max X(t)$ در نقاط صحیح رخ می دهد، بنابراین داریم:

$$\max_{0\le t\le 10} X(t) = \max_{0\le n\le 10} X_n = \max\{U_0,\dots,U_{10}\}$$
$$\Rightarrow \Pr\{\max\{U_0,\dots,U_{10}\} \le 0.5\} = \Pi_{i=0}^{10}\Pr\{U_i \le 0.5\} = (\Pr\{U_i \le 0.5\})^{11} = (0.5)^{11}$$

-۵

الف)

$$Var(X(0)) = E\{|X(0)|^2\} - E^2\{X(0)\} = R_{XX}(0,0) - m_X^2(0) = m_X(0) - m_X^2(0) = m_X(0)[1-m_X(0)] \ge 0$$

از طرفی $m_X(0) = R_{XX}(t,t) = E\{|X(t)|^2\} > 0$، بنابراین: $1-m_X(0) \ge 0$ و یا $m_X(0) \le 0$.

$$|R_X(t+t,t)|^2 = |E\{X(t+t)X^*(t)\}|^2 \le E\{|X(t+t)|^2\}E\{|X(t)|^2\} = m_X^2(0) \le 1$$

ب)

$$\begin{aligned} E\{|X(t+1)-X(t)|^2\} &= E\{|X(t+1)|^2\} + E\{|X(t)|^2\} - E\{X(t+1)X^*(t)\} - E\{X^*(t+1)X(t)\} \\ &= R_{XX}(t+1,t+1) + R_{XX}(t,t) - 2\,\mathrm{Re}\{R_{XX}(t+1,t)\} = 2m_X(0) - 2\,\mathrm{Re}\{m_X(1)\} \\ &= 2m_X(0) - 2 \end{aligned}$$

چون $m_X(0) \le 1$ و از طرفی مقدار فوق باید مثبت باشد، در نتیجه $m_X(0) = 1$ و بنابراین: $E\{|X(t+1)-X(t)|^2\} = 0$

لذا $X(t+1) \overset{ms}{=} X(t)$ و $m_X(t+1) = m_X(t)$. آن گاه: $m_X(2) = 1$.

ج)

$$R_X(t+t,t) = E\{e^{jW(t+t)}e^{-jWt}\} = E\{e^{jWt}\} = m_X(t)$$

د) $m_X(0) = m_X(1) = m_X(2) = 1$، و

$$|R_X(t+t,t)| = |m_X(t)| = |e^{-l(1-e^{j2pt})}| = e^{-l}\,|e^{l(\cos(2pt)+j\sin(2pt)}| = e^{-l(1-\cos(2pt))} \le 1$$

-۶

الف)

$$\begin{aligned} \Gamma_X(z_1,z_2,z_3) &= E\{z_1^{X_1}z_2^{X_2}z_3^{X_3}\} = E\{z_1^{X_1}z_2^{(X_2-X_1)+X_1}z_3^{(X_3-X_2)+(X_2-X_1)+X_1}\} \\ &= E\{(z_1z_2z_3)^{X_1}\}E\{(z_1z_2)^{X_2-X_1}\}E\{z_3^{X_3-X_2}\} \\ &= \Gamma_{X_1}(z_1z_2z_3)\Gamma_{X_2-X_1}(z_1z_2)\Gamma_{X_3-X_2}(z_3) \end{aligned}$$

با توجه به نمو مستقل بودن فرآیند پواسون:

$$X_1 \sim Poisson(l_0t) \quad , \quad X_2 - X_1 \sim Poisson(l_0t) \quad , \quad X_3 - X_2 \sim Poisson(2l_0t) \quad \rightarrow$$
$$\Gamma_{X_1}(z) = \Gamma_{X_2-X_1}(z) = e^{l t_0(z-1)} \quad , \quad \Gamma_{X_3}(z) = e^{2l t_0(z-1)} \quad \rightarrow \quad \Gamma_X(z_1,z_2,z_3) = e^{l t_0(z_1z_2z_3+z_2z_3+2z_3-4)}$$

ب)

$$\Pr\{X_3 = 4n \mid X_1 = n\} = \Pr\{X_3 - X_1 = 3n \mid X_1 = n\} = \Pr\{X_3 - X_1 = 3n\} = e^{-3l t_0}\frac{(3l t_0)^{3n}}{(3n)!}$$

$$\Pr\{X_1 = n \mid X_3 = 4n\} = \frac{\Pr\{X_3 = 4n \mid X_1 = n\}\Pr\{X_1 = n\}}{\Pr\{X_3 = 4n\}} = \frac{[e^{-3l t_0}\frac{(3l t_0)^{3n}}{(3n)!}][e^{-l t_0}\frac{(l t_0)^n}{n!}]}{e^{-4l t_0}\frac{(4l t_0)^{4n}}{(4n)!}} = \frac{(4n)!}{n!(3n)!}\frac{3^{3n}}{4^{4n}}$$

-۷

الف)

$$E\{[X(t_2)-X(t_1)]^2\}=a|t_2-t_1| \xrightarrow{t_2=t\ ,\ t_1=0} E\{X^2(t)\}=a|t|$$

$$\rightarrow \quad E\{X^2(t_2)\}+E\{X^2(t_1)\}-2E\{X(t_2)X(t_1)\}=a|t_2|+a|t_1|-2R_{XX}(t_2,t_1)=a|t_2-t_1|$$

$$\rightarrow \quad R_{XX}(t_2,t_1)=\frac{a}{2}(|t_2|+|t_1|-|t_2-t_1|)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود فرآیند ساکن نیست.

ب) فرض $t_4 \ge t_3 \ge t_2 \ge t_1$، آن‌گاه:

$$E\{[X(t_4)-X(t_3)][X(t_2)-X(t_1)]\}=E\{X(t_4)X(t_2)\}+E\{X(t_3)X(t_1)\}$$
$$-E\{X(t_4)X(t_1)\}-E\{X(t_2)X(t_3)\}=R_{XX}(t_4,t_2)+R_{XX}(t_3,t_1)-R_{XX}(t_4,t_1)-R_{XX}(t_3,t_2)$$
$$=\frac{a}{2}[|t_4|+|t_2|-|t_4-t_2|+|t_1|+|t_3|-|t_1-t_3|-|t_4|-|t_1|+|t_4-t_1|-|t_3|-|t_2|+|t_3-t_2|]$$
$$=\frac{a}{2}[-|t_4-t_2|-|t_1-t_3|+|t_4-t_1|+|t_3-t_2|]=\frac{a}{2}[-(t_4-t_2)-(t_3-t_1)+(t_4-t_1)+(t_3-t_2)]=0$$

ج)

$$m_Y(t)=E\{Y(t)\}=\frac{1}{e}[E\{X(t+e)\}-E\{X(t)\}]=0$$

$$R_{YY}(t+t,t)=\frac{1}{e^2}E\{[X(t+t+e)-X(t+t)][X(t+e)-X(t)]\}$$
$$=\frac{1}{e^2}[R_{XX}(t+t+e,t+e)+R_{XX}(t+t,t)-R_{XX}(t+t,t+e)-R_{XX}(t+t+e,t)]$$

اگر $t \ge e$، آن‌گاه: $t+t+e \ge t+t \ge t+e \ge t$ و با توجه به بند (ب): $R_{YY}(t+t,t)=0$

اگر $t \le -e$، آن‌گاه: $t+e \ge t \ge t+t+e \ge t+t$ و با توجه به بند (ب): $R_{YY}(t+t,t)=0$

اگر $e \ge t \ge 0$، آن‌گاه: $t+t+e \ge t+e \ge t+t \ge t$ و

$$R_{YY}(t+t,t)==\frac{1}{e^2}[R_{XX}(t+t+e,t+e)+R_{XX}(t+t,t)-R_{XX}(t+t,t+e)-R_{XX}(t+t+e,t)]$$
$$=\frac{a}{2e^2}[|t+t+e|+|t+e|-t+|t+t|+|t|-t-|t+t|-|t+e|+e-t-|t+t+e|-|t|+t+e]$$
$$=\frac{a}{2e^2}(2e-2t)=\frac{a}{e}(1-\frac{t}{e})$$

اگر $0 \ge t \ge -e$، آن‌گاه: $t+e \ge t+t+e \ge t \ge t+t$ و

$$R_{YY}(t+t,t)==\frac{1}{e^2}[R_{XX}(t+t+e,t+e)+R_{XX}(t+t,t)-R_{XX}(t+t,t+e)-R_{XX}(t+t+e,t)]$$
$$=\frac{a}{2e^2}[|t+t+e|+|t+e|+t+|t+t|+|t|+t-|t+t|-|t+e|+e-t-|t+t+e|-|t|+t+e]$$
$$=\frac{a}{2e^2}(2e+2t)=\frac{a}{e}(1+\frac{t}{e}) \qquad \rightarrow \qquad R_{YY}(t+t,t)=\frac{a}{e}\Lambda(\frac{t}{e})$$

بنابراین، $Y(t)$ ساکن است.

-۸

$$E(X(A))=\int_0^\infty E(X(A)|A=a)f_A(a)\,da=\int_0^\infty E(X(A)|A=a)e^{-a}\,da$$
$$=\int_0^\infty E(X(a))e^{-a}\,da$$

با توجه به این که $X(a)$ یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $l=\int_0^a e^{\frac{t}{2}}\,dt=2(e^{\frac{a}{2}}-1)$ خواهد بود ،نتیجه می گیریم که

$$E(X(A))=\int_0^\infty E(X(a))e^{-a}\,da=\int_0^\infty 2(e^{\frac{a}{2}}-1)e^{-a}\,da$$
$$=2\int_0^\infty (e^{-\frac{a}{2}}-e^{-a})\,da=2(2-1)=2$$

برای بدست آوردن واریانس متغیر تصادفی $Y=X(A)$ ابتدا توان این متغیر تصادفی را بدست می آوریم

$$E(X^2(A))=\int_0^\infty E(X^2(A)\,|\,A=a)f_A(a)\,da=\int_0^\infty E(X^2(A)\,|\,A=a)e^{-a}\,da$$
$$=\int_0^\infty E(X^2(a))e^{-a}\,da=\int_0^\infty (2(e^{\frac{a}{2}}-1)+4(e^{\frac{a}{2}}-1)^2)e^{-a}\,da$$
$$=\int_0^\infty (4e^a-6e^{\frac{a}{2}}+2)e^{-a}\,da=\infty$$

در نتیجه واریانس این متغیر تصادفی بینهایت می شود.

-۹

الف) با توجه به این که میانگین فرایند صفر می باشد تابع همبستگی و کواریانس یکسان می باشد.

$$C_Y=R_Y=E\begin{pmatrix}X(2)\\X(3)\\X(4)\end{pmatrix}\big(X(2)\;X(3)\;X(4)\big)=\begin{bmatrix}5 & 0 & \frac{5}{9}\\0 & 5 & 0\\\frac{5}{9} & 0 & 5\end{bmatrix}$$

ب) با توجه به بند الف $X(4)$ و $X(3)$ ناهمبسته و بدلیل تواما نرمال بودن مستقل هستند. همچنین $X(2)$ و $X(3)$ ناهمبسته و بدلیل تواما نرمال بودن مستقل هستند. بنابراین $X(3)$ از $X(2)$ و $X(4)$ به صورت تواما مستقل می باشد، در نتیجه داریم

$$f_{X_4|X_3,X_2}(x_4|x_3,x_2)=\frac{f_{X_4,X_3,X_2}(x_4,x_3,x_2)}{f_{X_3,X_2}(x_3,x_2)}=\frac{f_{X_4,X_2}(x_4,x_2)f_{X_3}(x_3)}{f_{X_2}(x_2)f_{X_3}(x_3)}=\frac{f_{X_4,X_2}(x_4,x_2)}{f_{X_2}(x_2)}=f_{X_4|X_2}(x_4|x_2)$$

و بنابراین

$$E\big(X(4)\,|\,X(3),X(2)\big)=E\big(X(4)\,|\,X(2)\big)$$
$$=r_{X(2),X(4)}\frac{s_{X(4)}}{s_{X(2)}}(X(2)-m_{X(2)})+m_{X(4)}$$
$$=\frac{1}{9}X(2)$$

تساوی دوم با توجه به تواما نرمال بودن $X(2)$ و $X(4)$ و براساس رابطه امید ریاضی شرطی دو متغیر تصادفی تواما نرمال نوشته شده است. تساوی سوم نیز با توجه به ممانهای $X(2)$ و $X(4)$ و ضریب همبستگی ایندو بدست آمده است.

-۱۰

الف) چون متغیرهای تصادفی تواماً نرمال هستند، برای استقلال کافی است ناهمبسته باشند. یعنی:

$$C_X(t) = R_X(t) - |m_X|^2 = R_X(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{n}{4} \quad n \in Z \ , n \neq 0$$

ب)

$$\begin{cases} m_{Y_1}(t) = E\{Y_1(t)\} = E\{X(t)\} - E\{X(t-0.5)\} = 0 \\ m_{Y_2}(t) = E\{Y_1(t)\} = E\{X(t)\} + E\{X(t+0.5)\} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_{Y_1}^2 = E\{[X(t) - X(t-0.5)]^2\} = E\{X^2(t)\} + E\{X^2(t-0.5)\} - 2E\{X(t)X(t-0.5)\} \\ \quad = 2R_X(0) - 2R_X(0.5) = 32 \\ s_{Y_2}^2 = E\{[X(t) + X(t+0.5)]^2\} = E\{X^2(t)\} + E\{X^2(t+0.5)\} + 2E\{X(t)X(t+0.5)\} \\ \quad = 2R_X(0) - 2R_X(0.5) = 32 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s_{Y_1Y_2} &= E\{[X(t) - X(t-0.5)][X(t) + X(t+0.5)]\} \\ &= E\{X^2(t)\} - E\{X(t)X(t-0.5)\} + E\{X(t)X(t+0.5)\} + E\{X(t+0.5)X(t-0.5)\} \\ &= R_X(0) - R_X(0.5) + R_X(0.5) - R_X(1) = 16 \end{aligned}$$

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{64p}} e^{-\frac{y_1^2}{64}} \quad , \quad f_{Y_2}(y_2) = \frac{1}{\sqrt{64p}} e^{-\frac{y_2^2}{64}} \quad , \quad f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{32p\sqrt{3}} e^{-\frac{y_1^2 + y_2^2 - y_1 y_2}{48}}$$

ج) طبق بند الف ۳ متغیر تصادفی مستقل از هم هستند.

$$\begin{cases} m_{z_1} = m_{z_2} = m_{z_3} = 0 \\ s_{z_1}^2 = s_{z_2}^2 = s_{z_3}^2 = 16 \end{cases} \quad , \quad \Phi_{Z_1}(w) = \Phi_{Z_2}(w) = \Phi_{Z_3}(w) = e^{-8w^2}$$

$$\rightarrow \quad \Phi_{Z_1,Z_2,Z_3}(w_1, w_2, w_3) = \Phi_{Z_1}(w_1)\Phi_{Z_2}(w_2)\Phi_{Z_3}(w_3) = e^{-8(w_1^2 + w_1^2 + w_1^3)}$$

-۱۱

الف) با توجه به اینکه $R_X(t) = e^{-2l|t|}$:

$$R_X = E\{\begin{bmatrix} X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} [X(1) \ \ X(2) \ \ X(3) \ ]\} = \begin{bmatrix} R_X(0) & R_X(1) & R_X(2) \\ R_X(1) & R_X(0) & R_X(1) \\ R_X(2) & R_X(1) & R_X(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-2l} & e^{-4l} \\ e^{-2l} & 1 & e^{-2l} \\ e^{-4l} & e^{-2l} & 1 \end{bmatrix}$$

ب)

$$\begin{aligned} \Pr\{X_1 = X_2 = X_3\} &= \Pr\{X_1 = X_2 = X_3 = 1\} + \Pr\{X_1 = X_2 = X_3 = -1\} = 2\Pr\{X_1 = X_2 = X_3 = 1\} \\ &= 2(\frac{1}{2})[(\frac{1}{2})(1 + e^{-2l})][(\frac{1}{2})(1 + e^{-2l})] = (\frac{1}{4})(1 + e^{-2l})^2 \end{aligned}$$

ج)

$$\begin{aligned} m_{X_4} &= E\{X(2 + X_1)\} = \Pr(X_1 = 1)E\{X(2 + X_1) \mid X_1 = 1\} + \Pr(X_1 = -1)E\{X(2 + X_1) \mid X_1 = -1\} \\ &= \frac{1}{2}E\{X_3 \mid X_1 = 1\} + \frac{1}{2}E\{X_1 \mid X_1 = -1\} = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(1 + e^{-4l}) - \frac{1}{2}(1 - e^{-4l})] - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-4l}) \end{aligned}$$

چون $X \in \{-1,1\}$، بنابراین: $X^2 = 1$ و در نتیجه: $r_{X_4} = E\{X^2(2 + X_1)\} = 1$. لذا:

$$s_{X_4}^2 = r_{X_4} - m_{X_4}^2 = 1 - \frac{1}{4}(1-e^{-2l})^2$$

-۱۲

الف)

می‌دانیم $\sum_{k=0}^{m-1}\cos(\frac{2pk}{m}) = \sum_{k=0}^{m-1}\sin(\frac{2pk}{m}) = 0$. بنابراین از نظر آماری:

$$m_X(t) = E\{X(t)\} = aE\{\cos(w_0 t + \frac{2pN}{m})\} = a\cos(w_0 t)E\{\cos(\frac{2pN}{m})\} - a\sin(w_0 t)E\{\sin(\frac{2pN}{m})\}$$

$$E\{\cos(\frac{2pN}{m})\} = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{m}\cos(\frac{2pk}{m}) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\cos(\frac{2pk}{m}) = 0$$

$$E\{\sin(\frac{2pN}{m})\} = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{m}\sin(\frac{2pk}{m}) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sin(\frac{2pk}{m}) = 0 \qquad \rightarrow \quad m_X(t) = 0$$

از نظر زمانی: $< a\cos(w_0 t + \frac{2pN}{m}) >_t = 0$. بنابراین، فرآیند ME است.

ب)

از نظر آماری:

$$R_{XX}(t+t,t) = E\{a^2\cos(w_0(t+t) + \frac{2pN}{m})\cos(w_0 t + \frac{2pN}{m})\}$$

$$= \frac{a^2}{2}E\{\cos(w_0 t) + \cos(2w_0 t + w_0 t + \frac{4pN}{m})\} = \frac{a^2}{2}\cos(w_0 t) + \frac{a^2}{2}E\{\cos(2w_0 t + w_0 t + \frac{4pN}{m})\}$$

$$E\{\cos(2w_0 t + w_0 t + \frac{4pN}{m})\} = \cos(2w_0 t + w_0 t)\underbrace{E\{\cos(\frac{4pN}{m})\}}_{=0 \quad m>2} - \sin(2w_0 t + w_0 t)\underbrace{E\{\sin(\frac{4pN}{m})\}}_{=0 \quad m>1}$$

بنابراین:

$$R_{XX}(t+t,t) = \begin{cases} \frac{a^2}{2}\cos(w_0 t) & m > 2 \\ \frac{a^2}{2}\cos(w_0 t) + \cos(2w_0 t + w_0 t) & m = 2 \end{cases}$$

از نظر زمانی:

$$< a^2\cos(w_0(t+t) + \frac{2pN}{m})\cos(w_0 t + \frac{2pN}{m}) >_t = \frac{a^2}{2} < \cos(w_0 t) + \cos(2w_0 t + w_0 t + \frac{4pN}{m}) >_t$$

$$= \frac{a^2}{2}\cos(w_0 t)$$

در نتیجه، فرآیند برای $m > 2$، CE است و به ازای $m = 2$ CE نیست.

-۱۳

الف)

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E\{(\int_0^{t_1}W(a)da)(\int_0^{t_2}W(b)db)\} = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}E\{W(a)W(b)\}db\,da$$

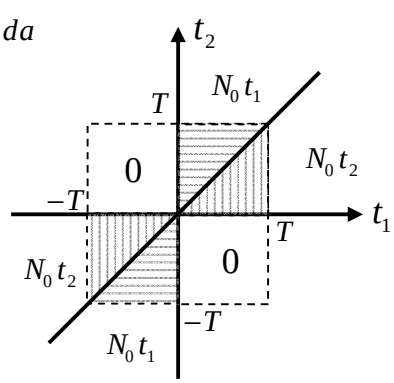
$$= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}N_0 d(a-b)db\,da$$

$t_1 > 0 > t_2$ یا $t_2 > 0 > t_1$: $R_{XX}(t_1,t_2) = 0$

$t_1 > t_2 > 0$: $R_{XX}(t_1,t_2) = \int_0^{t_2}\int_0^{t_1}N_0 d(a-b)da\,db = \int_0^{t_2}N_0 db = N_0 t_2$

$t_1 < t_2 < 0$: $R_{XX}(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}N_0 d(a-b)db\,da = \int_0^{t_1}N_0 da = N_0 t_1$

$\rightarrow \quad R_{XX}(t_1,t_2) = N_0\min(|t_1|,|t_2|)u(t_1 t_2)$



ب) چون $m_X(t)=0$، در نتیجه: $C_{XX}(t_1,t_2)=R_{XX}(t_1,t_2)$ از طرفی:

$$\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}C_{XX}(a,b)\,da\,db=\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}N_0\min(a,b)u(ab)\,da\,db$$

$$=\frac{2N_0}{4T^2}\int_0^T\int_0^T\min(a,b)\,da\,db=\frac{2N_0}{4T^2}\left(\int_0^T\int_0^b a\,da\,db+\int_0^T\int_0^a b\,db\,da\right)=\frac{2N_0}{4T^2}\left(\frac{2}{6}T^3+\frac{2}{6}T^3\right)=\frac{N_0T}{6}$$

حد مقدار فوق وقتی $T\to\infty$ نامحدود است. بنابراین فرآیند ME نیست.

-۱۴

الف)

از نظر آماری: $m_X(t)=E\{X(t)\}=\frac{1}{2}\sin^2 t+\frac{1}{2}\cos^2 t=\frac{1}{2}$

از نظر زمانی: $$<x(t)>_t=\begin{cases}<\sin^2 t>=\frac{1}{2} & x=x_1\\ <\cos^2 t>=\frac{1}{2} & x=x_2\end{cases}=\frac{1}{2}=m_X(t)$$

بنابراین، فرآیند ME است.

ب)

از نظر آماری:

$$R_X(t+t,t)=E\{X(t+t)X(t)\}=\frac{1}{2}\sin^2(t+t)\sin^2(t)+\frac{1}{2}\cos^2(t+t)\cos^2(t)$$

$$=\frac{1}{8}[\cos t-\cos(2t+t)]^2+\frac{1}{8}[\cos t+\cos(2t+t)]^2=\frac{1}{4}[\cos^2(t)+\cos^2(2t+t)]$$

$$=\frac{1}{8}[1+\cos(2t)+1+\cos(4t+2t)]=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cos(2t)+\frac{1}{8}\cos(4t+2t)$$

از نظر زمانی:

$$<\sin^2(t+t)\sin^2(t)>_t=\frac{1}{4}<[\cos(t)-\cos(2t+t)]^2>_t=\frac{1}{4}\cos^2(t)+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cos(2t)$$

$$<\cos^2(t+t)\cos^2(t)>_t=\frac{1}{4}<[\cos(t)+\cos(2t+t)]^2>_t=\frac{1}{4}\cos^2(t)+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cos(2t)$$

$$\rightarrow\quad <x(t+t)x(t)>_t=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cos(2t)\neq R_X(t+t,t)$$

بنابراین، فرآیند CE نیست.

-۱۵

الف) متوسط فرآیند صفر است و

$$C_X(t+t,t)=R_X(t+t,t)-m_X(t+t)m_X^*(t)=R_X(t+t,t)=e^{-t^2}d(t)$$

$$<<C_X(t+t,t)>_t>_t=<<e^{-t^2}d(t)>_t>_t=<e^{-t^2}>_t<d(t)>_t=0\times 0=0$$

در نتیجه فرآیند ME است.

ب) چون تابع همبستگی فرآیند وابسته به زمان است، در نتیجه ساکن نیست و CE نمی‌تواند باشد.